

格子QCD計算で できること

レプトン原子核反応型模型

高エネルギー加速器研究機構
橋本省二
平成24年3月19日



もくじ

1. 格子QCDシミュレーション
 - 格子QCDとはどんな理論か？
 - どうやって計算するのか？
 - できること、できないこと
2. 核子の形状因子
 - ベクトル・カレント
 - 軸性ベクトル・カレント





強い力のジレンマ

■ バリオン・メソン

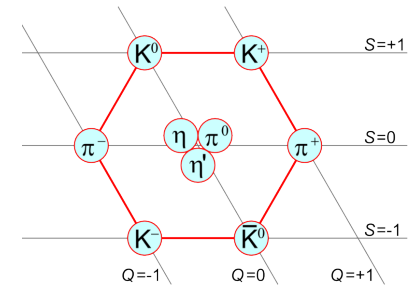
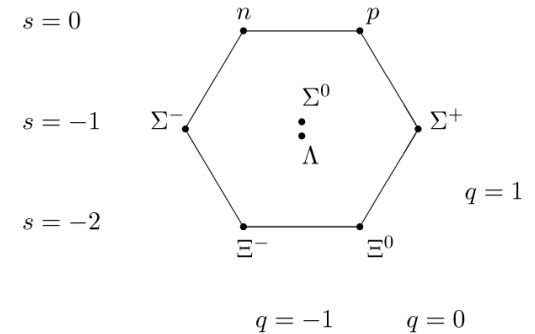
- クォーク模型を使ってスペクトルを理解。なるほど、もっともらしい。
- パイ中間子は南部ゴールドストーン粒子らしい。低エネルギー定理 → カイラル有効理論。
- それ以上わかることはあまりない。



現実と基礎理論の大きなギャップ

■ クォーク

- 非可換ゲージ理論では漸近自由。摂動計算が可能。でも現実のプロセスは？
- クォークの閉じ込め？
- カイラル対称性の破れ？



摂動計算？

- 実際にできること

$$\sigma = C(Q^2, \mu_F^2) \otimes f_{i/A}(x, \mu_F^2)$$

クォークを外線とする過程。
摂動で計算する部分。

そのクォークがハドロン中に
どれだけあるかを表す何か。
計算不能。

- 結局わかるのは、
 - 異なる Q^2 の間の関係とか、
 - 異なるプロセスの間の関係。

各ハドロンに応じてそれ
ぞれ別のわからない関数。
フィットして決める。
CTEQ とか何とか。



なぜそうなのか？

- 基礎理論にもとづく計算ができないから。
 - モデル計算はいろいろあるけど、どこまで正しいかわからない。

それでどうなるの？

- 積み残した問題のせいで、いろんなところで困っている。LHCの解析（QCDジェットの計算）、Bファクトリーの解析（B中間子崩壊の計算）
- 核子の形状因子。。。
- 非摂動物理が出てくるとあちこちで頓挫。

非摂動計算手法の開発が多くの場所で問題解決の鍵になる。
数値計算でも気にしない。





何がそんなに難しいのか？

- 量子色力学（強い力の基礎理論）はこれだけ。

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 + \sum_f \bar{\psi}_f (\not{D} + m_f) \psi_f \right\}$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ig T^a A_\mu^a$$

- あとは経路積分で量子論を定義。
- 見た目は量子電磁気学とそんなに変わらない。なんでそんなに苦労するのか。
- 漸近自由性。低エネルギーでは結合定数が大きくなる。



1. 格子QCDシミュレーション

簡潔なまとめ (PDG review 2012)

SH, J. Laiho, S. Sharpe, “Lattice Quantum Chromodynamics”

<http://ccwww.kek.jp/pdg/2011/reviews/rpp2011-rev-lattice-qcd.pdf>

QCD の定義 = 経路積分

$$Z = \int [dA_\mu][d\psi][d\bar{\psi}] e^{iS};$$

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 + \sum_f \bar{\psi}_f (\not{D} + m_f) \psi_f \right\}$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

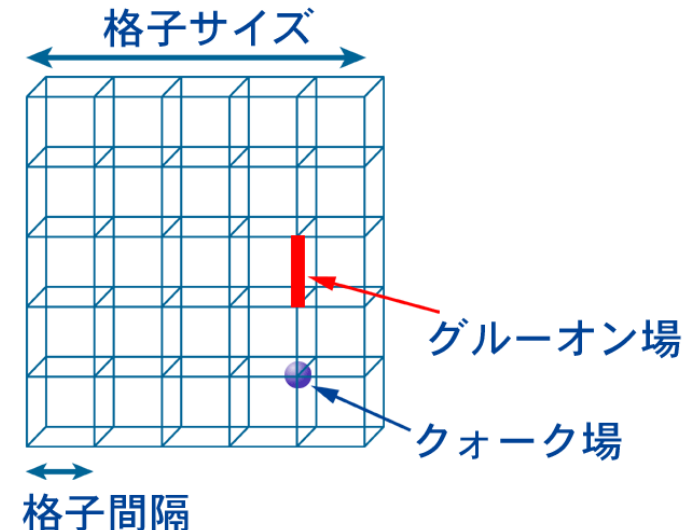
$$D_\mu = \partial_\mu - ig T^a A_\mu^a$$

- これが計算できればよい。でもそんなに簡単ではない。
 - 作用は、 A^2 だけでなく、 A^3 , A^4 も含む。ガウス積分に帰着できない。
 - 普通は g に関して展開する（摂動論）。でも一般に収束しない。

格子上の理論

- 4次元立方格子
 - 場の変数は格子点上のみに定義する。
 - 格子間隔をゼロにする極限（連続極限）に行けば、望みのQCDになる。
 - 場の理論というのは、そもそもそういうもの。発散するので規格化しておかないと定義できない。あとで紫外切断を無限大にする。それと同じ。

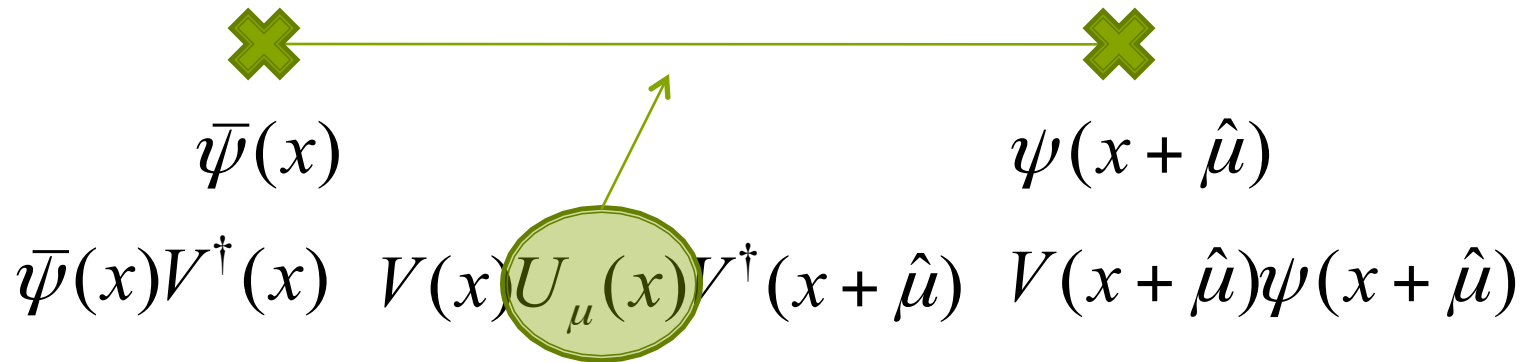
- 摂動計算に依存しない定義
 - 普通の次元正則化は摂動計算することを前提とした定義。格子は非摂動領域も含めて使える完全な“定義”



単に計算の便宜上持ち出したものではなく、場の理論の（唯一の？）正しい定式化。

格子上の理論

- 鍵はゲージ対称性
 - 空間の任意の点で別々のSU(3)回転を考える。
 - ラグランジアンが不変になるようにつじつま合わせの場を導入（ゲージ場）。



$$\bar{\psi}(x) \quad \psi(x + \hat{\mu})$$

$$\bar{\psi}(x)V^{\dagger}(x) \quad V(x)U_{\mu}(x)V^{\dagger}(x + \hat{\mu}) \quad V(x + \hat{\mu})\psi(x + \hat{\mu})$$

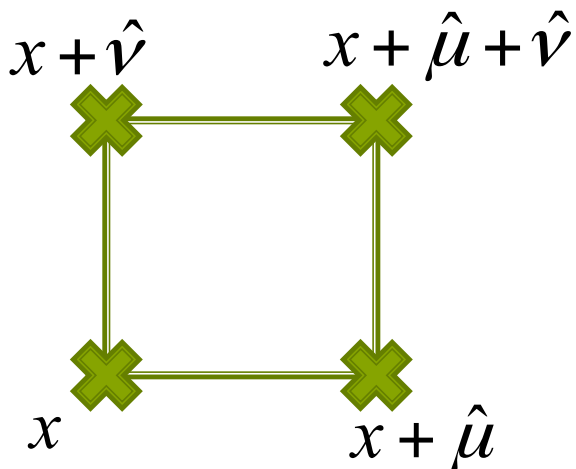
$$U_{\mu}(x) = \exp \left[i g a A_{\mu}(x) \right] = 1 + i g a A_{\mu}(x) + \dots$$

$$A_{\mu}(x) \rightarrow V(x) \left[A_{\mu}(x) + \frac{i}{g} \partial_{\mu} \right] V^{\dagger}(x)$$



ゲージ場

- ゲージリンク $U_\mu(x)$
 - ユニタリー行列 $SU(3)$
 - つなげておくとゲージ不変になる。



$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x) \right] \\ & \approx \text{Tr} \left[e^{igaA_\mu} e^{iga(A_\nu + a\partial_\mu A_\nu)} e^{-iga(A_\mu + a\partial_\nu A_\mu)} e^{-igaA_\nu} \right] \\ & \approx \text{Tr} \left[e^{iga^2(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - g^2 a^2 [A_\mu, A_\nu]} \right] = \text{Tr} \left[e^{iga^2 F_{\mu\nu}} \right] \\ & = \text{Tr}[1] - \frac{1}{2} g^2 a^4 \text{Tr} [F_{\mu\nu}^2] + \dots \end{aligned}$$



ゲージ理論のラグランジアン



ゲージ作用

- 連続極限 $a \rightarrow 0$ では通常のものに戻る。

$$\begin{aligned} S &= \frac{6}{g^2} \sum_x \sum_{\mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{3} \text{Re Tr} \left[U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x) \right] \right] \\ &\rightarrow a^4 \sum_x \sum_{\mu < \nu} \text{Re Tr} \left[F_{\mu\nu}^2 \right] \\ &= \int d^4x \frac{1}{4} \left(F_{\mu\nu}^a \right)^2 \end{aligned}$$

- 唯一ではない。より速く連続極限に近づくもの考えてもよい。
- 結合定数: $\beta \equiv 6/g^2$
 - 統計モデルでは $1/kT$ に相当。 $\beta=0$ は高温極限。





経路積分

作用（ラグランジアン）が決まったら、あとは経路積分。

- A を U で置き換え。

$$\begin{aligned} Z &= \int [dU_\mu][d\psi][d\bar{\psi}] e^{-S_g - \int d^4x \bar{\psi}(D[U]+m)\psi} \\ &= \int [dU_\mu] \det(D[U]+m) e^{-S_g} \end{aligned}$$

- $U = \exp(iagA) \sim 1 + iagA + \dots$
 - $a \sim 0$ か $g \sim 0$ では連続理論に戻る。
- フェルミオン部分はグラスマン積分。積分すると行列式を与える。

こういう多重積分が出てきたらモンテカルロ法の出番。
もっとも重要そうな配位だけを取り出して代表させる。





経路積分

■ 演算子の期待値

$$\begin{aligned}\langle O(U, q, \bar{q}) \rangle &= \frac{1}{Z} \int dU \prod_f dq_f d\bar{q}_f O(U, q, \bar{q}) e^{-S_g[U] - \sum_f \bar{q}_f (D[U] + m_f) q_f} \\ &= \frac{1}{N} \sum_i O(U^{(i)}, S_q[U^{(i)}])\end{aligned}$$

- これさえわかればあらゆる物理量は再構成可能。
- 格子ゲージ理論で計算できるのは、これに帰着できるものに限る。





質量、崩壊定数。。。。

- 2点関数 $C_{XY}(t; \vec{p}) = \sum_{\vec{x}} \langle O_X(t, \vec{x}) O_Y^\dagger(0) \rangle e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}.$

- 状態の完全系で展開

$$C_{XY}(t; \vec{p}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2E_i(\vec{p})} \langle 0 | O_X(0) | H_i(\vec{p}) \rangle \langle H_i(\vec{p}) | O_Y^\dagger(0) | 0 \rangle e^{-E_i(\vec{p})t}$$

- 十分離れたところでみる

$$C_{XY}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2E_0(\vec{p})} \langle 0 | O_X(0) | H_0(\vec{p}) \rangle \langle H_0(\vec{p}) | O_Y^\dagger(0) | 0 \rangle e^{-E_0(\vec{p})t}$$



演算子の行列要素



基底状態の質量





形状因子

- 3点関数
- 例えば、

$$C_{KV_\mu D}(t_x, t_y; \vec{p}) = \sum_{\vec{x}, \vec{y}} \langle O_K(t_x, \vec{x}) V_\mu(0) O_D^\dagger(t_y, \vec{y}) \rangle e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}$$

- 完全系を挿入

$$C_{KV_\mu D}(t_x, t_y; \vec{p}) = \sum_{i,j} \frac{1}{2m_{D_i} 2E_{K_j}(\vec{p})} e^{-m_{D_i} t_x - E_{K_j}(\vec{p}) |t_y|} \times$$
$$\times \langle 0 | O_K(t_x, \vec{x}) | K_i(\vec{p}) \rangle \langle K_i(\vec{p}) | V_\mu(0) | D_j(\vec{0}) \rangle \langle D_j(\vec{0}) | O_D^\dagger(0) | 0 \rangle$$

知りたい行列要素





問題はフェルミオン

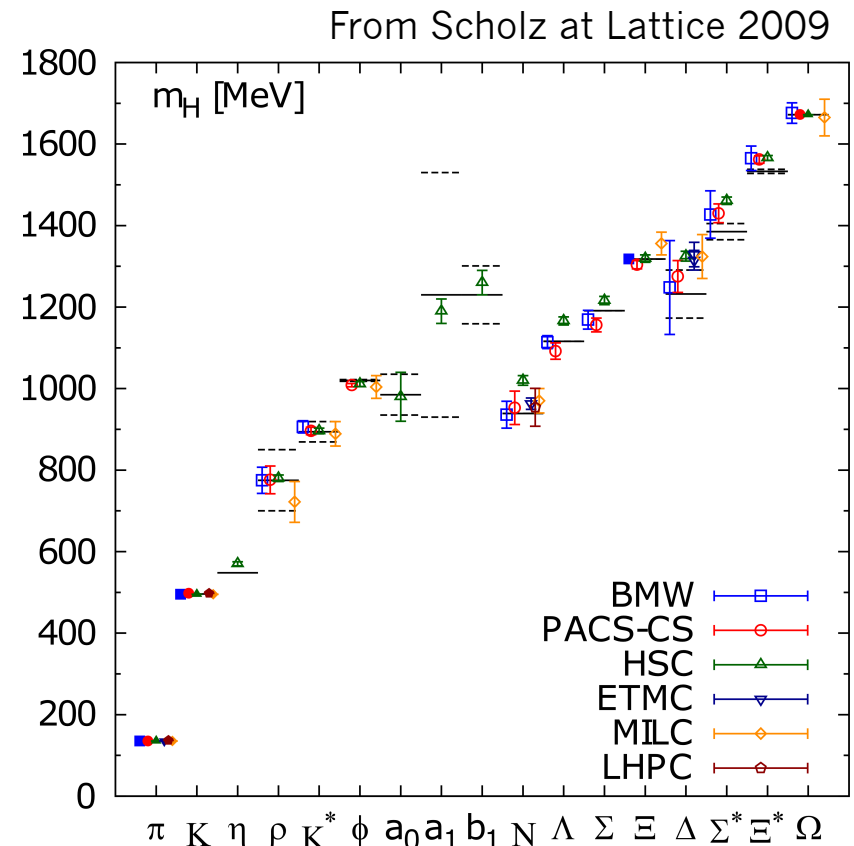
- 理論定式化としても面倒
 - カイラル対称性、ダブリング、... いろいろあって一筋縄ではいかない。
 - さまざまな定式化が用いられる。
 - ウィルソン型：カイラル対称性を壊す。
 - スタッガード型：フレーバー対称性を壊す。
 - ギンスバーグ・ウィルソン型：どちらも保つが遅い。
- 計算上もとても大変。
 - 大規模行列の行列式。全固有値を求めるのと同様。 $O(V^3)$ の計算コスト。
$$\det(D[U] + m) = \prod_k (m + i\lambda_k[U])$$
 - ましなやり方はあるけど、それでも大変。スパコン。



質量スペクトル

- 中間子と重粒子のスペクトル
 - 格子計算へのインプットは
 1. 全体のスケール（あるいは結合定数）
 2. 個々のクォーク質量
 これだけ。他はすべて予言。
- ほぼ正確に現実の値を再現できる
ところまできた。

格子QCD計算は一つの到達点を
迎えた。
次はさまざまな物理へ展開。



Typically, 3 inputs: π , K , Ω
for 3 parameters: m_{ud} , m_s , Λ_{QCD}

平成23年8月4日

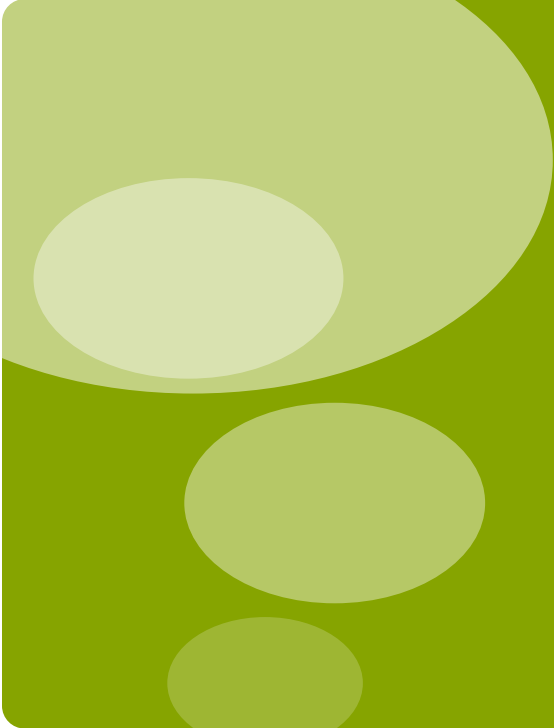




できること、できないこと

- できること（よいこと）
 - QCDそのものの非摂動計算。モデルの介在する余地はない。（格子間隔をゼロにする極限では余計な高次元演算子の寄与は消える。）
 - 数値計算ができればそれですべて。好きなだけ精密な計算。
- できないこと（わるいこと）
 - ユークリッド化するところから始める。空間的 ($q^2 = -Q^2 < 0$) 相関関数しか計算できない。時間的領域へは解析接続。普通は無理なので、何か別の理論的定式化を考える。ずっと難しい。
 - 相関関数で表せない量（核子の構造関数とか）は、間接的なやり方を考える（モーメントとか）。
 - 多体系は難しい。計算コスト、統計誤差、必要な体積。。。。





3. 核子の形状因子



ベクトル・カレント

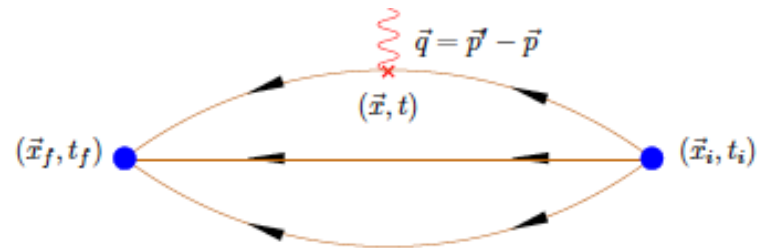
■ 行列要素

$$\langle N(p', s') | j^\mu | N(p, s) \rangle = \left(\frac{m_N^2}{E_N(\mathbf{p}') E_N(\mathbf{p})} \right)^{1/2} \bar{u}(p', s') \left[\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m_N} F_2(q^2) \right] u(p, s)$$

■ 電弱形状因子

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) + \frac{q^2}{(2m_N)^2} F_2(q^2)$$

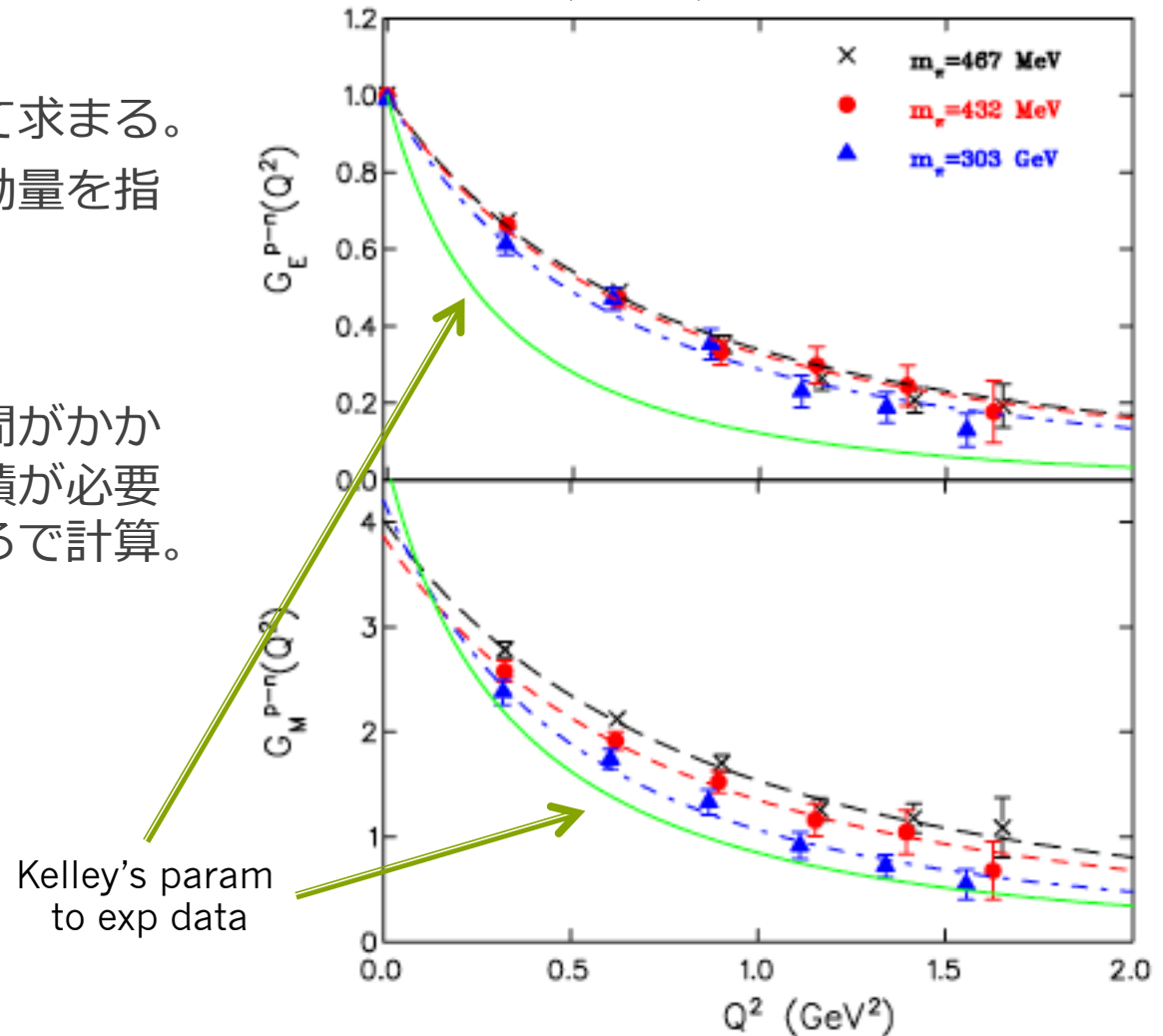
$$G_M(q^2) = F_1(q^2) + F_2(q^2)$$



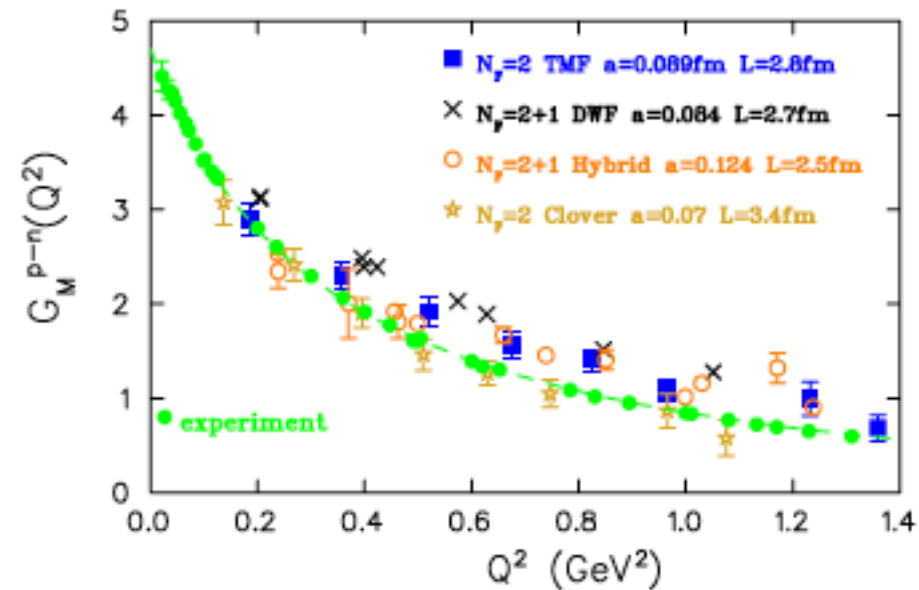
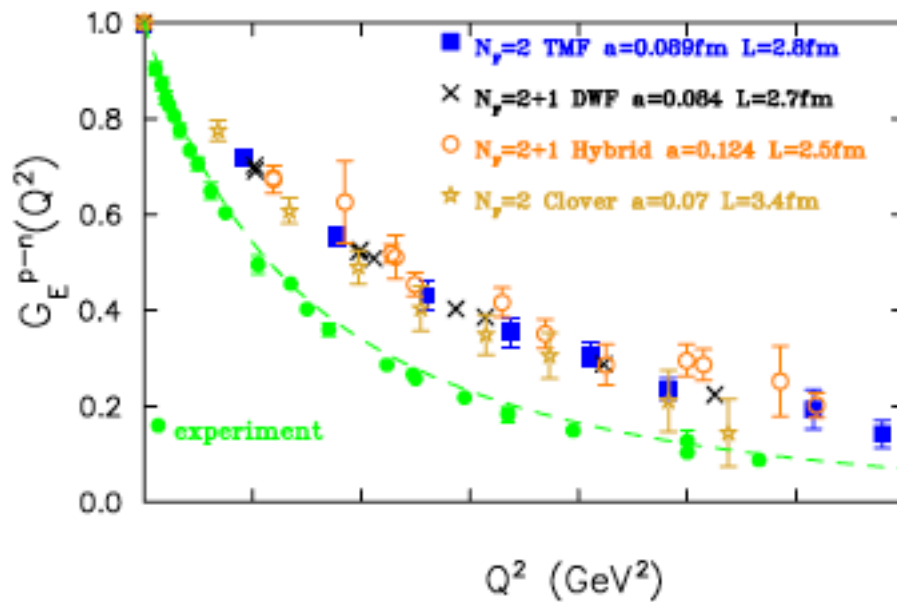
典型的な結果

- 運動量移行の関数として求まる。
 - 始状態と終状態の運動量を指定すれば決まる。
- クォーク質量に依存
 - 現実の値に取ると時間がかかりすぎるし大きな体積が必要なので少し重いところで計算。
 - あとで外挿する。

ETMC (2011)



比較

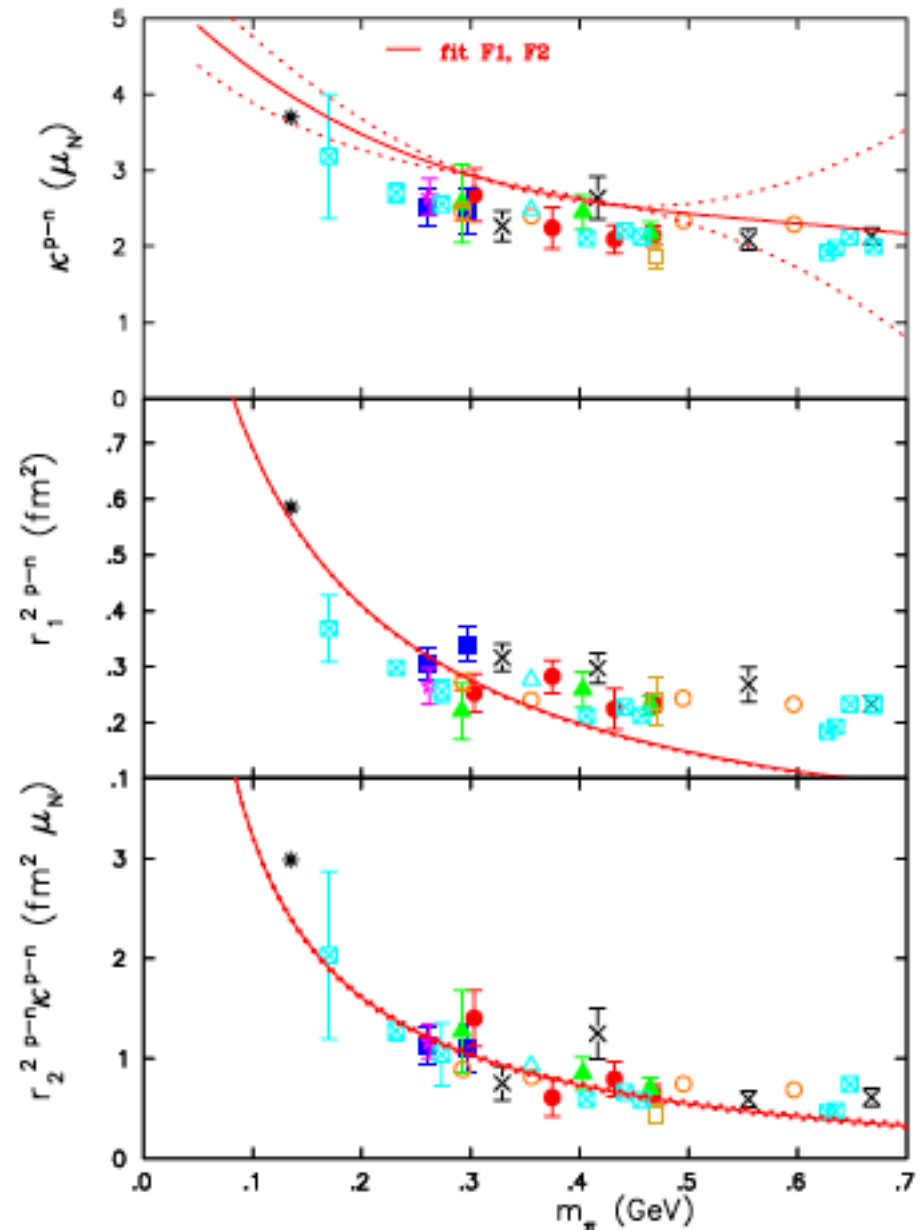


- G_E : 実験値をちゃんと再現していないように見える。
- G_M : グループ間で不一致

カイラル外挿

- そんなに自明ではない（かもしれない）理由
 - パイ中間子は南部ゴールドストーン粒子。自然界では質量ゼロに近い。この極限では物理量に非解析的な振る舞い。
 - 核子では、デルタが近くにいるので、さらにやっかい。
- 異常磁気能率 $\kappa = F_2(0)$
- 荷電半径

$$F_i(Q^2) = F_i(0) \left[1 - \frac{\langle r_i^2 \rangle}{6} Q^2 + \dots \right]$$

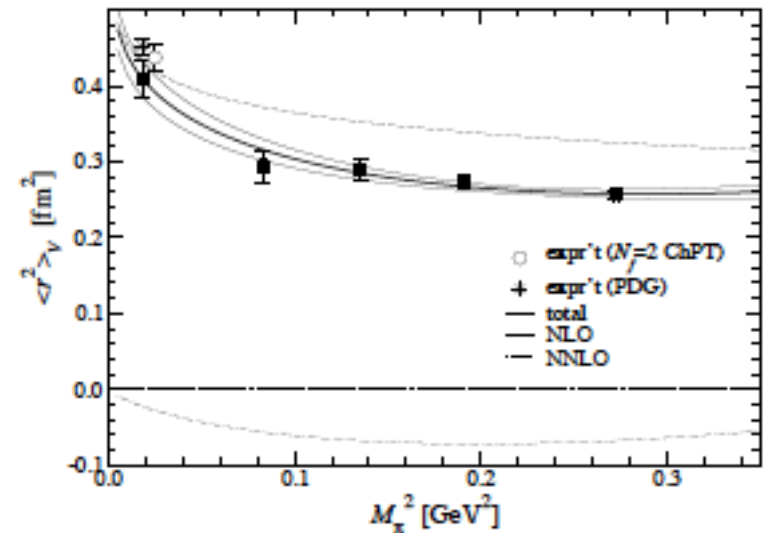




カイラル外挿

- 一番よくわかっているのはパイ中間子
 - カイラル有効理論を信頼してもよさそう。
 - 格子計算ももっとも簡単。精度のよい計算ができる。
- パイ中間子の荷電半径（形状因子の $Q^2=0$ での傾き）
 - カイラル摂動論によれば質量ゼロでログ発散。
 - 現象論的にもっともらしい係数をとると高次の項が無視できない。

JLQCD (2009)





軸性ベクトル・カレント

■ 行列要素

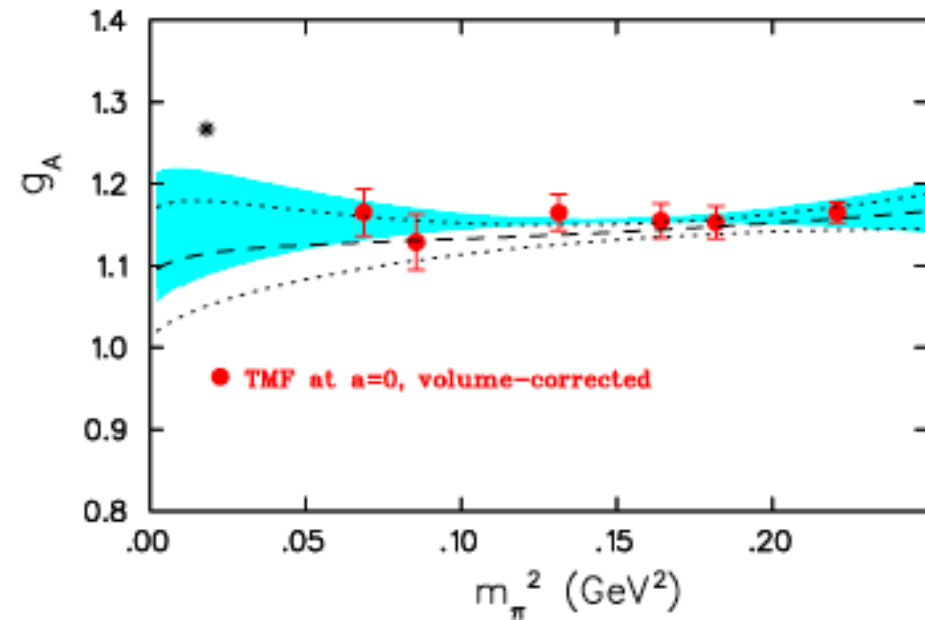
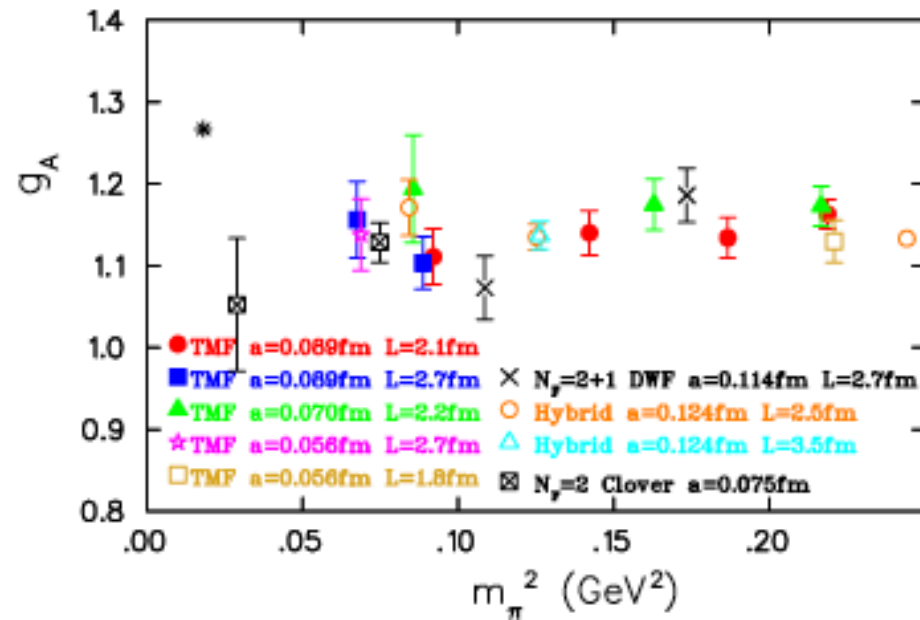
$$\langle N(p', s') | A_\mu^3 | N(p, s) \rangle = \frac{i}{2} \left(\frac{m_N^2}{E_N(\mathbf{p}') E_N(\mathbf{p})} \right)^{1/2} \bar{u}(p', s') \left[\gamma_\mu \gamma_5 G_A(q^2) + \frac{q_\mu \gamma_5}{2m_N} G_P(q^2) \right] u(p, s)$$

- やるべき計算や難しさはそれほど変わらない。
- 軸性荷電 $g_A = G_A(0)$
 - ベータ崩壊のおかげで、ここだけは実験でよく決まっている。格子計算のベンチマーク。



g_A

■ ベンチマーク plot from Alexandrou, arXiv:1111.5960

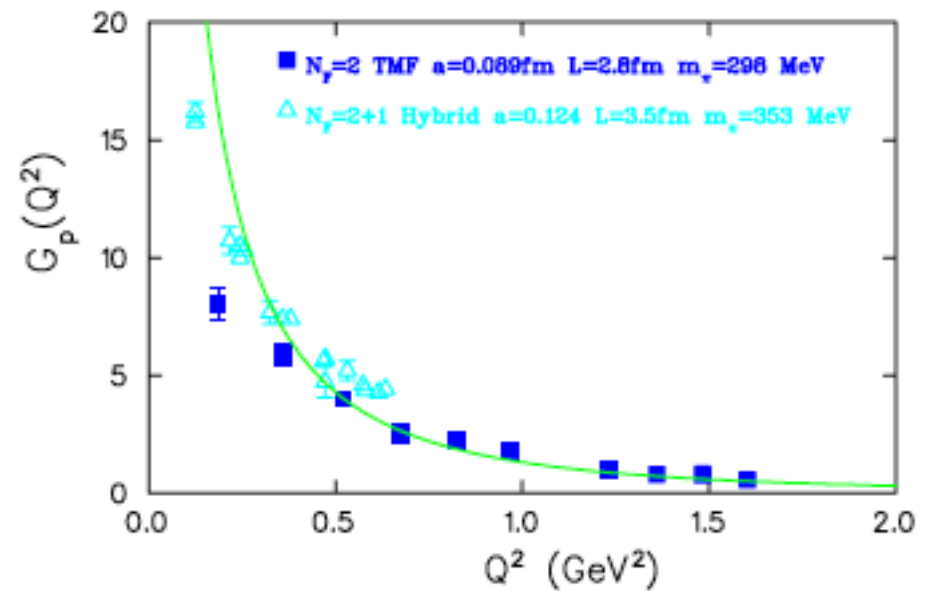
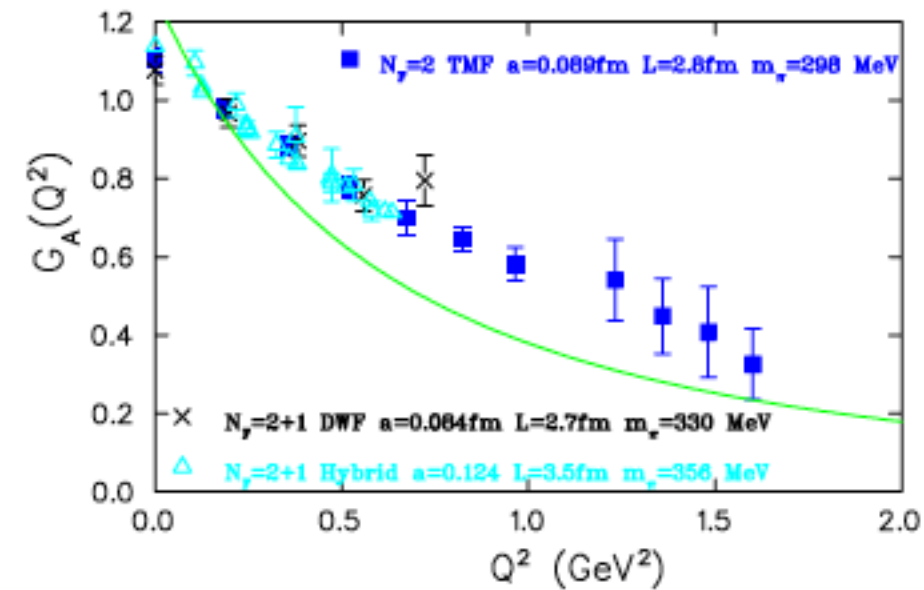


■ どうも合わない。有限体積効果という説が有力。



 G_A, G_P

- こちらも同様の系統誤差。。。。





まとめ

- 格子QCDのシミュレーション
 - できる。ハドロンスペクトルについては、かなりいい線。
- 核子の形状因子
 - 実験で決まっている量を使って検証できるはず。まだ何か変。
 - カイラル外挿は自明でない。カイラル摂動論は、核子については系統的な展開を与える「理論」になっていない。模型。
 - 結局は現実のクォーク質量（あるいは非常に近く）で直接計算しないといけないのかもしれない。ただし、統計誤差が指数的に大きくなる。

$$S / N \sim \exp[-(m_N - 3m_\pi / 2)t]$$



